Taki Academy
www.takiacademy.com

Exercice 1 : 25 min 5 pts

On considère la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = \frac{3}{2} \\ U_{n+1} = (U_n - 1)^2 + 1, \text{ pour tout } n \in IN \end{cases}$

1°) Calculer U_1 et U_2.

2°) a) Montrer que pour tout $n \in IN$: $1 \leq U_n \leq \frac{3}{2}$.

b) Etudier la monotonie de (U_n).

c) En déduire que (U_n) est convergente et calculer sa limite.

3°) a) Montrer que pour tout $n \in IN$: $0 \leq U_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(U_n - 1)$.

b) Déduire que pour tout $n \in IN$: $U_n - 1 \leq \frac{1}{2^{n+1}}$.

c) Retrouver alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

Exercice 2 : 30 min 6 pts

Soit la suite réelle (u_n) définie sur IR par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2 + 1}} \end{cases}$

1°) a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in$ IN, on a : $0 \leq u_n \leq 1$.

b) Montrer que pour tout $n \in$ IN, $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

c) En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

2°) Pour tout $n \in$ IN, on pose $v_n = \frac{1}{u_n^2}$.

a) Montrer que la suite v est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison.

b) Exprimer v_n en fonction de n puis retrouver u_n en fonction de n.

3°) On pose pour tout $n \in$ IN, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.

a) Calculer S_0, S_1 et S_2.

b) Montrer que pour tout $k \in$ IN, $\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1} \leq \frac{1}{2\sqrt{k+1}}$.

c) En déduire que pour tout $n \in$ IN, $S_n \geq 2\left(\sqrt{n+2} - 1\right)$ puis calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

www.takiacademy.com